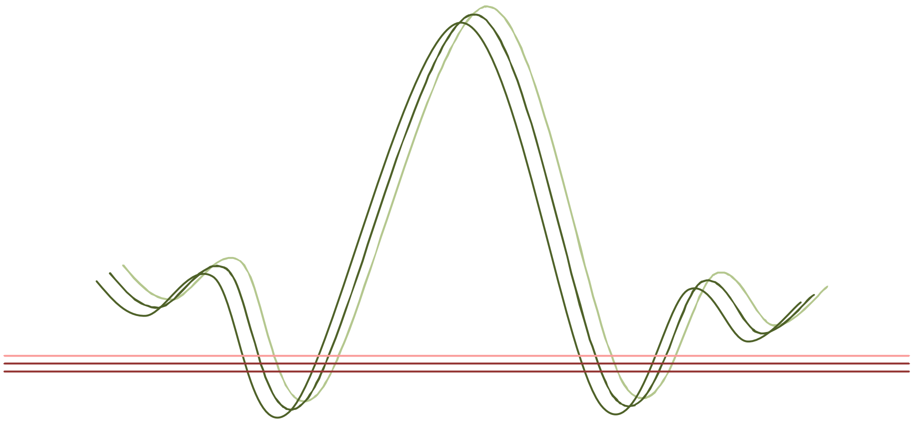
2008

RIVP

RONALD IVÁN VACA POQUIOMA

www.seccperu.org/ivanvaca



[COMPRESIÓN DE LA INFORMACIÓN CON WAVELETS DE HAAR]

Compresión de la Información con Wavelets de Haar

Ronald Iván Vaca Poquioma[1,2]

[1]Sociedad de Estudiantes de Ciencia de la Computación

[2]Universidad Nacional de Trujillo

ivan@seccperu.org

Resumen

En el presente paper presentaremos acerca del uso de los Wavelets Haar para la compresión de la información; y esto nos referimos a la aplicación en la compresión de imágenes y del sonido, para lo cual estudiaremos las nociones básicas de los wavelets y cómo actúan en el proceso de compresión de la imagen y sonido.

1. Introducción

En éste tiempo en donde todo lo que nos rodea y en el cual nos desempeñamos, es la era digital y es así como las comunicaciones han doblado fuerzas por este tipo de información. Hoy en día donde la velocidad, el tiempo y el espacio son factores principales de la comunicación y la computación y sus diversas actividades, lo que conlleva a optimizar recursos, reducir esfuerzos y tamaño, por ello la compresión de información, ya sea de imágenes y/o sonido son uno de los motivos de estudios por los cuales se han hecho muchas investigaciones. Y teniendo esa preocupación es que nos centraremos en la compresión de la información, teniendo en cuenta un método que nos permite obtener buenos resultados como son los Wavelets de Haar.

2. Conocimientos Previos

2.1 Teoría de Fourier

Teoría de Fourier, la cual dice que una señal se compone de una serie de funciones sinusoidales y de ésta forma es más sencillo su análisis. Recordando un poco, la transformada de Fourier (FT) de la señal está definida por:

$$FT = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \qquad (1)$$

La Transformada de Fourier trabaja bien si la señal $x(t)$ está compuesta de unos cuantos componentes estacionarios. Sin embargo, algún cambio repentino en el tiempo, en una señal $x(t)$ no estacionaria, es separada del eje de frecuencias. Para contrarrestar estas desventajas se ha modificado la Transformada de Fourier dando origen a lo que es la Short Time Fourier Transform (STFT) también conocida como la Transformada de Gabor. [1]

2.2 Wavelets

Las wavelets son familias de funciones que se encuentran en el espacio y se emplean como funciones de análisis, examinan a la señal de interés para obtener sus características de espacio, tamaño y dirección; la familia está definida por:

$$h_{a,b} = \frac{h\left(\frac{x-b}{a}\right)}{\sqrt{|a|}}; a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \qquad (2)$$

y son generadas a partir de funciones madre $h(x)$. A esa función madre se le agregan un par de variables que son la escala (a) que permite hacer dilataciones y contracciones de la señal y la variable de traslación (b), que nos permite mover a la señal en el tiempo. Estas variables son números reales y obviamente para una escala de 0 la función se indetermina. Las wavelets se usan en el procesamiento de señales por sus características. Existen diferentes wavelets que ya son utilizadas de forma constante y que tienen definiciones establecidas. Sin embargo, la elección de un tipo de wavelet depende de la aplicación específica que se le vaya a dar. [1]

2.3 Wavelets de Haar

Comenzaremos este capítulo desarrollando la teoría wavelet en tiempo continuo para la wavelets de Haar, esto es descompondremos una función continua calcularemos sus coeficientes y luego la reconstruiremos en diferentes grados de resolución.

2.4 Función Haar Escala

Sea la función $\phi(t)$ perteneciente a $L^2(R)$, definida de la siguiente forma:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & el \quad resto. \end{cases} \qquad (3)$$

Esta función la denominaremos función de escalamiento, que gráficamente es representada como se muestra en la Figura anterior. Definimos entonces un conjunto de funciones de escalamiento en términos de traslaciones enteras de la función básica de escalamiento $\phi(t)$:

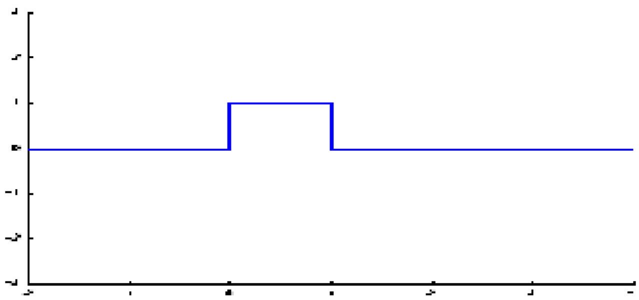


Fig. 1: Función Haar de escalamiento

2.5 Función Haar Wavelet

Como se observó en la sección anterior, se obtiene una mejor aproximación de la señal utilizando las funciones de escalamiento que ocupan el espacio V_1 que utilizando la función escalamiento que ocupa el espacio V_0. Sin embargo, las características de una señal pueden ser mejor descritas, no incrementado el tamaño del espacio de las funciones escalamiento, sino definiendo un espacio W de funciones levemente diferentes a las funciones escalamiento, que representen la diferencia que existe entre un espacio V_j y V_{j+1} un espacio, tal que:

$$V_{j+1=} = V_j \oplus W_j \qquad (4)$$

por lo que ya estamos en condiciones de decir que el espacio W_0 corresponde al complemento del espacio V_0 en el espacio V_1.

Ahora bien, la función que expande el espacio W_0 se conoce como función wavelet, y se define de la forma:

$$\psi(t)=\begin{cases} 1 \quad si \quad 0\le t\le \frac{1}{2} \\ -1 \quad si \quad \frac{1}{2}\le t\le 1 \\ 0 \quad caso \quad contrario \end{cases} \qquad (5)$$

que al igual que la función de escalamiento que expande el espacio V_0 puede ser representada sobre el intervalo $[0,1]$ como una combinación lineal de las funciones de escalamiento que expanden el espacio V_1 de la siguiente manera

$$\psi(t)=h_1(1)\sqrt{2}\phi(2t)+h_1(2)\sqrt{2}\phi(2t-1) \qquad (6)$$

De tal manera que al realizar el producto interno de (2) por $\sqrt{2}\phi(2t)$ y luego por $\sqrt{2}\phi(2t-1)$, obetenemos respectivamente que:

$$h_1(1)=\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\psi(t)dt \qquad (7)$$

y

$$h_1(2)=\sqrt{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\psi(t)dt \qquad (8)$$

respectivamente, y calculando los coeficientes g_1 y g_2 obtenemos como resultado que:

$$h_1(1)=-h_1(2)=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (9)$$

observando que estos coeficientes nos permiten mantener la normalidad de la función $\psi(t)$. Como ya sabemos que los espacios V_0 y V_1 son ortogonales y por lo tanto cualquier espacio V_j con $j=0,\pm1,\pm2,...$ también lo es, entonces el espacio W_0 al ser el complemento de V_0 en V_1 es ortogonal:

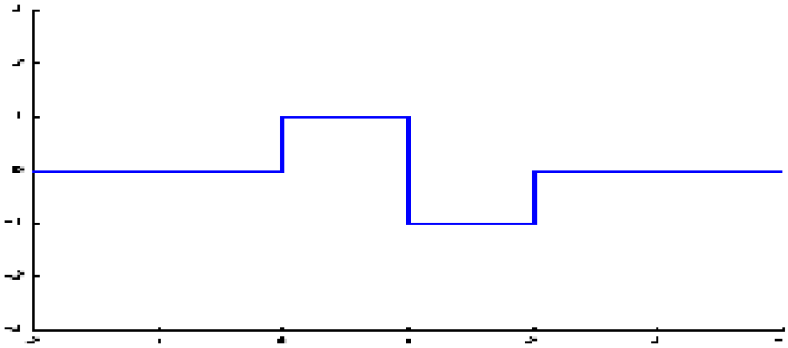


Fig 2: Función wavelet en W_0 como combinación lineal de las funciones escalamiento que expanden V_1 y V_0.

Por lo tanto, al igual que con la función escalamiento, es posible obtener una representación de la diferencia que existe entre aproximar una señal con un nivel de resolución j y aproximar la misma señal con un nivel de resolución $j+1$, mediante el producto interno de esta señal con un set de funciones que expandan el espacio W_j donde j será elegido de acuerdo al grado de aproximación que se desee. La propiedad de ortogonalidad de W_0 y por ende de la función wavelet $\psi(t)$, puede ser demostrada en forma análoga a como se demostró con la función de escalamiento. Si nos definimos la función wavelet como:

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1 & si \quad k \le t \le k + \frac{1}{2} \\ -1 & si \quad k + \frac{1}{2} \le t \le k+1 \\ 0 & caso \quad contrario \end{cases} \tag{10}$$

$$k \in Z \quad \wedge \quad \psi \in L^2(R)$$

2.6 Transformada Wavelet Continua (CWT).

La CWT de una señal x(t) que existe en, está definida por la siguiente ecuación:

$$CWT(b, f) = \sqrt{\left|\frac{f}{f_0}\right|} x(t) \psi\left(\frac{f}{f_0}(t-b)\right) dt \tag{11}$$

El término $\psi(t)$ se refiere a la *wavelet* madre que es una función prototipo se traslada y escala para analizar a la señal a diferentes resoluciones. Sea f/f_0 el parámetro de escalamiento.

La CWT tiene una buena resolución en tiempo y mala en frecuencia cuando se trata de altas frecuencia. Y por el contrario, cuando se habla de frecuencias bajas, ésta posee una resolución buena en frecuencia y pobre en tiempo.

2.7 Transformada Wavelet Discreta (DWT)

La transformada wavelet discreta tiene el mismo propósito que la transformada wavelet continua, solo que aquí se utilizan técnicas de filtrado digital, es decir, valores discretos de frecuencias de corte de diferentes filtros son utilizados para analizar a la señal a diferentes escalas. La señal se pasa a través de una serie de filtros, donde los pasa-altas se utilizan para las altas frecuencias y los pasa bajas para sus respectivas. Para wavelets discreta los parámetros de escala y traslación son elegidos tal que en el nivel j la *wavelet* $a_0^i h(a_0^{-j} x)$ es a_0^i veces el ancho de $h(x)$. Esto significa que el parámetro de escala es $a = a_0^j : j \in \mathrm{Z}$ y el parámetro de traslación $b = kb_0 a_0^j : j,k \in \mathrm{Z}$. De este modo la familia de *wavelets* está dada por:

$$h_{j,k}(x) = a_0^{-\frac{j}{2}} h(a_0^{-j} x - kb_0) \qquad (12)$$

y de ésta forma la Transformada Discreta de Wavelets tiene la forma:

$$d_{j,k} = a_0^{-\frac{j}{2}} \int f(x) h(a_0^{-j} x - kb_0) dx \qquad (13)$$

3. Desarrollo del Tema

La transformada wavelet ha emergido como una efectiva herramienta para el análisis de señales transistentes o no estacionarias. La propiedad de localzación de la Transformada Wavelet es particularmente atractiva, especialmente en problemas concernientes a la extracción de características o detección de comportamientos en señales durante pequeños intervalos de tiempo.

3.1 Compresión de la Información

La base o principio en la utilización de wavelets en compresión es aprovechar que los coeficientes en los espacios W_j son 'pequeños' si la señal analizada se comporta en forma suave y 'grandes' si la señal a analizar varía en forma notoria. Esto sugiere que pueden eliminarse o hacerse cero los coeficientes pequeños y la señal sintetizada o reconstruida no variará mucho.

Existen tres pasos fundamentales en el proceso de compresión con wavelets:

1. Proyectar la señal original a un subespacio multi-resolución V_n con un n lo suficientemente grande.
2. Aplicar el algoritmo de descomposición wavelet.
3. Establecer un esquema de cuantización.

3.1.1 Compresión de Imágen

Para el proceso de compresión de una imagen posee básicamente tres pasos:

1. El primero de ellos es la transformada de la señal de dos dimensiones que en este caso es la DWT
2. El segundo paso es la organización y eliminación de ciertos coeficientes tal que no afecte la inexistencia de los mismos la representación de la imagen.
3. Y por último viene la reconstrucción de la imagen con los coeficientes del segundo paso.

3.1.1.1 La transformada de Wevelets discreta

La DWT aplicada a imágenes proporciona una matriz de coeficientes, conocidos como coeficientes wavelet. Si a una imagen le aplicamos la DWT obtenemos cuatro tipos de coeficientes: aproximaciones, detalles horizontales, detalles verticales y detalles diagonales. La aproximación contiene la mayor parte de la energía de la imagen, es decir, la información más importante, mientras que los detalles tienen valores próximos a cero.

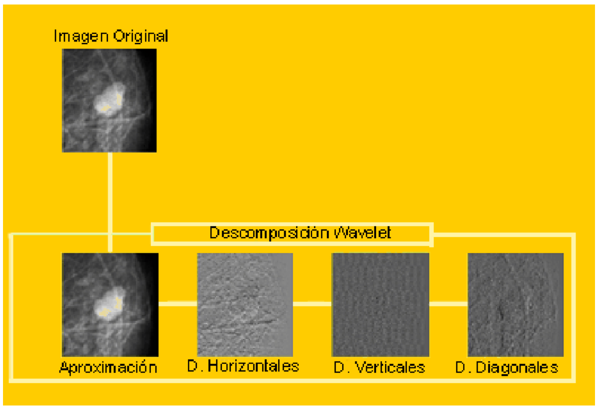


Fig. 3: Descomposición de Wavelets de primer nivel

3.1.1.2 Organización de los coeficientes de wavelets

Generalmente, la energía de las imágenes se concentra en las frecuencias bajas. Una imagen tiene un espectro que se reduce con el incremento de las frecuencias. Estas propiedades de las imágenes quedan reflejadas en la transformada wavelet discreta de la imagen. Los niveles más bajos de compresión se corresponden con las bandas de alta frecuencia. En particular, el primer nivel representa la banda de más alta frecuencia y el nivel más fino de resolución. A la inversa, el último nivel (n) de descomposición corresponde con la banda de frecuencia más baja y la resolución más tosca. Así, al desplazarse de los niveles más altos a los más bajos, o sea, de baja resolución a alta resolución, se observa una disminución de la energía contenida en las sub-bandas recorridas.

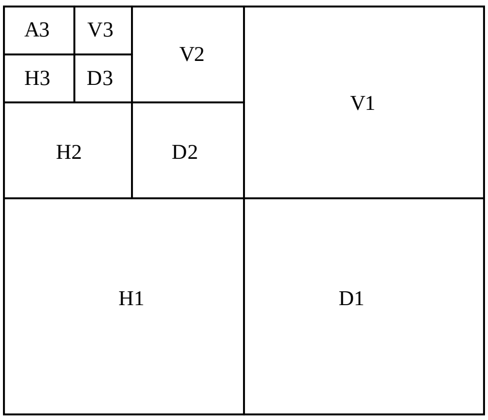


Fig. 4: Esquema de la organización de los coeficientes de wavelets

Si los coeficientes wavelet obtenidos por medio de la transformada wavelet discreta (DWT) para un nivel concreto poseen pequeñas magnitudes (valores próximos a cero), se espera que esos coeficientes wavelet estén en los primeros niveles de descomposición. El aumento del nivel de descomposición wavelet produce unos coeficientes con mayores magnitudes. Adicionalmente, se puede comprobar como existen similitudes espaciales a través de las sub-bandas.

Fig. 5: Imagen a trabajar

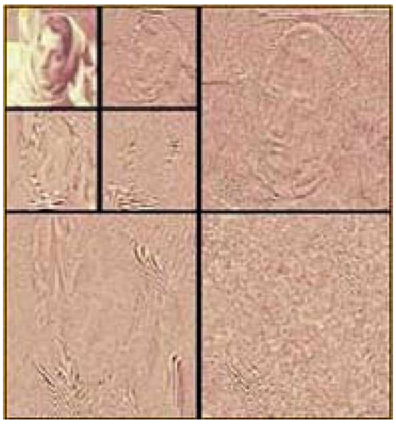


Fig. 6: Organización de los coeficientes de wavelets

En la figura anterior se puede observar los contornos de Bárbara (la imagen) en los distintos niveles y cómo son más bastos en el primer nivel de descomposición, además de cierta similitud entre los distintos niveles.

3.1.1.3 EZW (Embedded Zerotree Wavelet)

El método de compresión EZW fue propuesto por Shapiro en 1993. Este método explota las propiedades aportadas por la DWT para obtener resultados satisfactorios en la compresión: un gran porcentaje de coeficientes wavelets próximos a cero y la agrupación de la energía de la imagen. El EZW es sensible al grupo de bits transmitidos por orden de significancia, lo que le permite una compresión progresiva (embedded coding) de la imagen.

Cuantos más bits se añadan al resultado de la compresión, más detalles se estarán transmitiendo. La información sobre la significancia de los coeficientes wavelet (mapas de significancias) se almacenan en unas estructuras denominadas zerotrees.

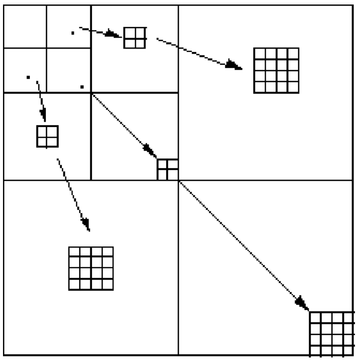


Fig. 7: Recorrido por la matriz de coeficientes wavelets en diferentes sub-bandas

La estructura zerotree agrupa los coeficientes de cuatro en cuatro: cada coeficiente tiene cuatro hijos, cada uno los cuales tiene sus propios cuatro hijos y así sucesivamente. Por lo general, los hijos tienen unas magnitudes menores que las de sus padres. El EZW se aprovecha de esta organización basada en el hecho de que los coeficientes wavelet se decrementan a medida que aumenta la escala. Así se puede garantizar que los coeficientes de un *quadtree* son más pequeños que el umbral de estudio, si su padre es más pequeño que el umbral antes mencionado.

El EZW transmite el valor de los coeficientes en orden decreciente. El recorrido de la matriz de coeficientes se realiza en zig-zag transmitiendo el n-ésimo bit más significativo en cada pasada.

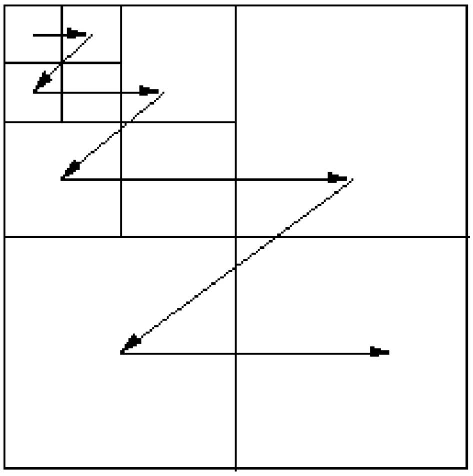


Fig. 8: Recorrido en Zig Zag

Al hacer el recorido en zig-zag se etiquetan los coeficientes de la siguiente manera: R, si el coeficiente es menor que el umbral de estudio, I, si el coeficiente es menor que el umbral pero tiene descendientes con valores dentro del rango de estudio (isolated zero), y P, cuando está dentro del rango y es positivo o N si es negativo. El método de compresión EZW para la compresión de imágenes ofrece unos muy buenos resultados, esto es, altas tasas de compresión con una calidad de imagen aceptable. Una variación del EZW es el algoritmo de compresión SPIHT.

3.1.2 Compresión de Audio

En la compresión de Audio uno de los algoritmos de codificación más conocidos corresponde al MPEG audio. Este algoritmo utiliza un sistema de banco de filtros de 32 bandas en conjunto con la FFT como analizador de espectro para calcular la 'curva de enmascaramiento' que se utiliza como umbral (Basado en la percepción auditiva del oído humano) dejando pasar sólo las componentes de frecuencia dominantes. Este algoritmo comprime señales de audio de 700 Kbits/sec (calidad de CD por ej.) a 128 Kbits/sec en mono y a 256 Kbits/sec en stereo.

Ahora bien ya que el algoritmo de descomposición utilizado por la transformada discreta wavelet es análogo a un sistema banco de filtros de dos bandas, entonces se puede observar, que un sistema wavelet multinivel puede ser utilizado en reeemplazo del sistema de banco de filtros de 32 bandas [CHU97]. Un ejemplo sobre este uso es el standard MPEG layer 3 más conocido como MP3.

4. Conclusiones

Las bases de Wavelet, al ser muchas y muy distintas, se adaptan muy bien a diversas aplicaciones y tipos de señal, dando incluso la posibilidad de crear una nueva base para una aplicación especifica o para un determinado tipo de señal.

La función escala de Haar es la encargada de analizar el comportamiento general de la señal, mientras que la función wavelet se encarga de analizar el comportamiento del detalle de la señal.

5. Referencias

[1] "Teoría de Wavelets" – Anónimo.
[2] "Procesamiento Digital de Señales Acústicas utilizando Wavelets"- Pablo Faundez, Alvaro Fuentes - Universidad Autónoma de Chile.
[3] http://coco.ccu.uniovi.es/immed/compresion/descripcion/spiht/htm
[4] "Image Compression - from DCT to Wavelets" ,The ACM Student Magazine, Subhasis Saha.